מדריך למורה ליחידה ב – לוחות ותבניות

היחידה עוסקת בחקירת לוחות של מספרים ומציאת קשרים בין המספרים בלוחות. התלמידים לבחנו אם הקשרים שמצאו מאפיינים את הלוח כולו (כלומר מהווים חוקיות בלוח) ואם כן – יכלילו, כלומר יתארו את הקשרים באופן מילולי וגם באמצעות משתנים.

בשונה מחקירה של סדרות של מספרים, החקירה של לוחות מאפשרת להתייחס לחוקיות בין איברים במקומות שונים ואפילו לא במרווחים קבועים. לשם כך ישתמשו התלמידים בתבניות שבעזרתן יחפשו קשרים בין מספרים שמסודרים בצורה מסוימת על הלוח.

חקירת הלוח מזמנת התנסות בהעלאת השערות ובבדיקתן (אם על ידי בדיקת כל הדוגמאות האפשריות בלוח אם על ידי שיקול הגיוני המסתמך על מבנה הלוח) וכן דיון בתפקידים של דוגמה תומכת ושל דוגמה נגדית בבדיקת השערות.

בניסוח ההשערות ישולבו מושגים מתמטיים כגון מספר זוגי, מספר ראשוני וכו'. במידת הצורך כדאי להזכיר לתלמידים את משמעות המושגים. למשל:

מספר ראשוני הוא מספר טבעי שיש לו בדיוק שני גורמים – 1 והמספר עצמו. דוגמאות: 3, 5, 7
יש לשים לב: מהגדרה זו נובע ש-1 אינו מספר ראשוני ואינו מספר פריק. שאלה מעניינת שאפשר להעלות היא האם המספר 2 הוא מספר ראשוני. (לעתים התלמידים טוענים בטעות שמכיוון ש-2 הוא מספר זוגי, הוא איננו ראשוני.)

תבניות בלוח שנה

משימות 1-3 (עמ' 31-32) עוסקות בחקירה של הדף הנתון מלוח שנה כלשהו.

במשימה 1 התלמידים יחפשו באופן חופשי קשרים בין המספרים בלוח.

במשימה 2 הם יחקרו רביעיות של מספרים המסודרים בלוח בצורת ריבוע 2X2.

סעיף א מיועד לתרגול ראשון של השימוש בתבניות.

בסעיף ב התלמידים מתבקשים למצוא קשרים ולתאר אותם באופן מילולי. סעיף ג משמש הכנה להנמקה אלגברית של הקשרים שנמצאו. לשם כך התלמידים ישלימו בעזרת ביטויים אלגבריים את התבניות הנתונות (ראו משמאל).

בסעיף ד התלמידים ינמקו באופן אלגברי את הקשרים שמצאו, בעזרת הביטויים שכתבו בסעיף ג.

א	ב	ג	ד	ה	ו	שבת
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

1

a	a+1
a+7	a+8

2

b-1	b
c-1	c

בסעיפים ה-ז התלמידים יבחנו קשרים שמוצגים בפניהם ויבדקו אם הם מהווים חוקיות בלוח. זה המקום לדבר על הנמקה של טענות ועל תפקידן של דוגמאות בהנמקה: טענה כללית יש לנמק בנימוק כללי, ודוגמה יכולה להמחיש או לסייע בהבנה אך אינה הנמקה, ואילו להפרכת טענה כללית די בדוגמה נגדית אחת.

<u>סעיף ה:</u> הקשר שטליה מצאה איננו חוקיות, וכדי להראות זאת די בדוגמה כלשהי מהלוח.

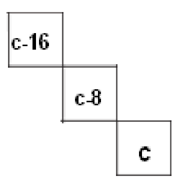
אפשר להציע לתלמידים לחפש את הדוגמה שהייתה לנגד עיניה של טליה. מובן שהם יתקשו למצוא את הדוגמה הזו – ואפשר לבקש מהם שינסו לנמק את הקושי. התלמידים עדיין אינם יודעים את חוק הפילוג המורחב, אך שימוש חוזר בחוק הפילוג בוודאי יעזור להם להבין שהמכפלה $a(a+8)$ לעולם לא יכולה להיות שווה למכפלה $(a+1)(a+7)$...

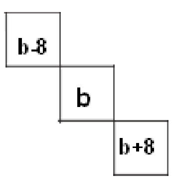
סעיף ו: התלמידים לא יתקשו למצוא את ההפרש בין שתי המכפלות שכתבו בסעיף הקודם ולראות שהוא אכן שווה תמיד ל-7.

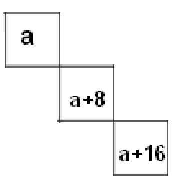
<u>סעיף ז:</u> הקשר שאביעד מצא איננו חוקיות בלוח, אך כדי למצוא דוגמה נגדית יש "להתקדם" קצת מהשורה העליונה של הלוח לשורות הבאות, כי בשורה הראשונה ובחלק מהשנייה אכן יש לפחות מספר ראשוני אחד בכל תבנית, כיוון שבין המספרים 1-11 כמעט מחצית הם מספרים ראשוניים. אפשר לשאול את התלמידים מהי הדוגמה הנגדית שהמספרים בה הם הקטנים ביותר. התשובה בלוח שמשמאל.

א	ב	ג	ד	ה	ו	שבת
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

במשימה 3 התלמידים יחקרו קשרי חוקיות בתבנית שונה, באופן דומה לחקירה שבמשימה 2 אך עצמאי יותר. בתבנית הנתונה המספרים גדלים בהפרש קבוע של 8. מובן שהביטויים שיתארו זאת תלויים בשאלה איזו משבצת סומנה במשתנה.







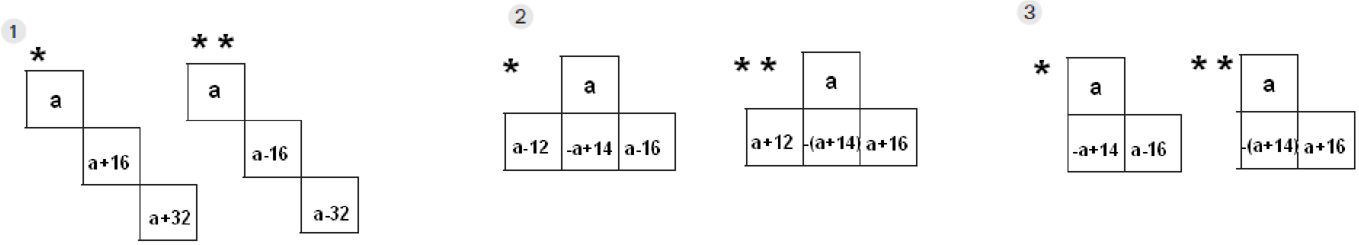
תבניות בלוחות מספרים

משימה 5 (עמ' 32)

כאן התלמידים יחפשו חוקיות בלוח שהחוקיות של מורכבת יותר – המספרים בלוח גדלים בערכם המוחלט ב-2 ממשבצת למשבצת, והסימן מתחלף לסירוגין. לכן למעשה התלמידים לא יוכלו לכתוב ביטויים המתארים את החוקיות באופן שלם, לפחות לא בכלים האלגבריים שיש להם בשלב זה. הם ימצאו שלכל תבנית חלק מהדוגמאות עונות לתיאור אחד וחלקן לתיאור אחר. אפשר לבקש מהתלמידים להבחין באילו מהמקרים יתאים התיאור האחד ובאילו מקרים התיאור האחר (בהתאם לסימן של המספר שמתאר המשתנה).

הנה דוגמאות לתיאור אלגברי של הקשרים בתבניות. מובן שאם התלמידים יבחרו שסמן במשתנה משבצת אחרת – הביטויים ישתנו בהתאם.

סעיף א:



משימה 6 (עמ' 33)

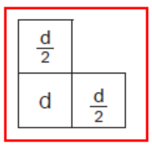
בעזרת התבנית הנתונה אפשר להשלים

כל אחד מהלוחות בהדרגה, כשבשלב

הראשון יוצאים כמובן מהמספר הנתון

ובעזרת התבנית משלימים שתי

משבצות אחרות:

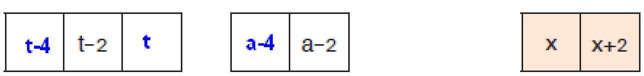


-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$
-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$
-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$
-16	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

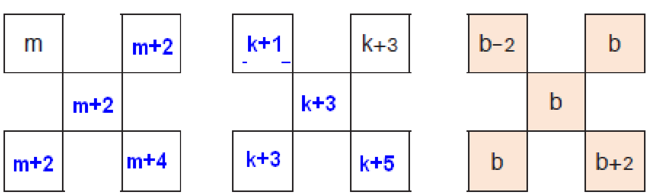
			−5			
		-20	-10	−5		
	-80	-40	-20	-10	−5	
-320	-160	-80	-40	-20	-10	−5

משימה 7 (עמ' 33)

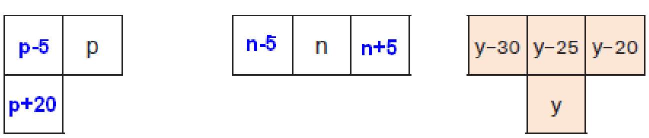
א.



ב.



ג.



סכום המספרים בתבנית

המשימות הבאות עוסקות בחקירה של **סכום המספרים בתבניות ריבועיות** בתוך לוחות שונים, במשימות 8 ו-9 אלה יהיו "לוחות חודש" דמיוניים, שבהם המספרים מתחילים מ-1 ומתקדמים בצעדים של 1 בכל פעם, ובמשימה 10 החקירה תורחב ללוחות שונים כיד הדמיון (והאומץ...) הטובה על התלמידים.

משימה 8 (עמ' 34)

מה שמאפיין לוח חודש (גם אם דמיוני) הוא שהוא מתחיל ביום הראשון בחודש, ומתקדם בצעדים של 1. בלוח המתואר במשימה זו כל שורה מתארת שבוע בן 7 ימים, לכן כשמתקדמים ממשבצת לזו שתחתה – מתקדמים ב-7 ימים. חלק מהתלמידים אולי יגיעו להכללה זו בעצמם – ואחרים אולי יצטרכו לרשום לעצמם את השורות הראשונות של הלוח כדי להגיע למסקנות. עודדו אותם לרשום לעצמם שורות כאלה – זו דרך נכונה לחפש הכללות.

x	x+1	x+2
x+7	x+8	x+9
x+14	x+15	x+16

א. כך נראית התבנית הנתונה:

כדי לחשב את הסכום אפשר לעבוד קשה, לחבר תשעה ביטויים ולקבל 9x+72; ואפשר לחפש קיצורי דרך, למשל: בכל שורה בתבנית סכום הביטויים גדול פי 3 מהביטוי האמצעי (חשוב כמובן להבין מדוע!), לכן הביטוי המתאים לסכום המספרים גדול פי 3 מהסכום בטור האמצעי. גם בכל טור הסכום גדול פי 3 מהמספר האמצעי, ולכן סכום כל המספרים בתבנית הוא 9 פעמים המספר שבמשבצת האמצעית בתבנית: 9(x+8) . כמובן יש לבדוק מה הקשר בין שני הביטויים.

ב.

ממדי התבנית	ביטוי לסכום המספרים
2 × 2	4(x+4)
דוגמה 3 × 3	9(x + 8)
4 × 4	16(x+12)
5 × 5	25(x+16)
6 × 6	36(x+20)
k × k	k•k[x+(k-1)4]